2.5. Poisson Süreci

Sayma süreçlerinin en önemlilerinden birisi de Poisson sürecidir.

Tanım 2.5.1. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\{X_t\ , t \geq 0\}$ sayma süreci bir Poisson süreci olarak adlandırılır. Poisson süreci sürekli parametreli kesikli durum uzaylı stokastik süreçtir.

1. $X_0 = 0$

2. X_t bağımsız artımlı süreçtir.

3. Herhangi bir t aralık uzunluğundaki olayların sayısı λt ortalama ile Poisson dağılmıştır. Yani tüm $t > 0$ için

$$P(X_{t+s} - X_s = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \quad k = 0,1,2, \dots$$

Bu 3. özellik Poisson sürecinin durağan artımlı ve $E(X_t) = \lambda t$ olduğunu gösterir.

2.5.1. Poisson sürecinin varyansı ve kovaryansı

a) $E(X_t) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X_t = k)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ke^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k(k-1)!} = \lambda t$$

$V(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t)^2 = E(X_t^2) - (\lambda t)^2$

$E(X_t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \quad , \qquad k^2 = k(k-1) + k$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (k(k-1) + k) \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

$= (\lambda t)^2 + \lambda t$

Bu ifade varyans formülünde yerine yazılırsa;

$V(X_t) = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t.$

b) $\forall\ s, t > 0\ için\ Cov(X_t\ , X_s) = \lambda min(t, s)$

$t < s$ için $Cov(X_t\ , X_s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s)$

$= E[X_t([X_s - X_t] + X_t)] - E(X_t)E(X_s)$

$$= E[X_t(X_s - X_t)] + E(X_t^2) - E(X_t)E(X_s)$$

Bağımsız artımlı süreç olduğundan;

$$= E(X_t)E(X_s - X_t) + E(X_t^2) - E(X_t)E(X_s)$$

$$= E(X_t)E(X_s) - E(X_t)^2 + E(X_t^2) - E(X_t)E(X_s)$$

$$= E(X_t^2) - E(X_t)^2 = \lambda t.$$